BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 22

Prof: Dobre Andrei Octavian

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Numerele $1,4,7,\ldots,28$ sunt în progresie aritmetică cu raţia 3, deci sunt 10 termeni	2p
	$10x+\frac{(1+28)\cdot 10}{2}=155\Leftrightarrow 10x+145=155$	2p
	$x=1$	1p
2.	Pentru $m=1$ inecuaţia devine $x+2>0$, care nu este adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$	1p
	Pentru $m\neq 1$: $m-1>0$ şi $\Delta=m^2-4(m-1)(m+1)=4-3m^2<0$	2p
	$m>1$ şi $m^2>\frac{4}{3}\Rightarrow m\in\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$	2p
3.	Condiţie: $e^x-1>0\Leftrightarrow x>0$	1p
	$\ln((e^x-1)(e^x+1))=1\Leftrightarrow e^{2x}-1=e\Leftrightarrow e^{2x}=e+1$	2p
	$x=\frac{\ln(e+1)}{2}>0$, deci convine	2p
4.	$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}=15\Leftrightarrow n^2-n-30=0$	3p
	$n=6$ (soluţia $n=-5$ nu convine)	2p
5.	$BC:\ \frac{y-6}{10-6}=\frac{x-4}{8-4}\Leftrightarrow x-y+2=0$	2p
	$d(A,BC)=\frac{\lvert 2-0+2\rvert}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$	2p
	$AA'=2\cdot d(A,BC)=4\sqrt{2}$	1p
6.	$AB^2+AC^2=4+12=16=BC^2\Rightarrow m(\sphericalangle BAC)=90^\circ$	2p
	AM este mediană în triunghiul dreptunghic $\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}=2$, iar $BM=2$	2p
	$AB=AM=BM=2\Rightarrow \triangle ABM$ echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle BAM)=60^\circ$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1.	$A^2=\begin{pmatrix}25-20 & 10-8\\ -50+40 & -20+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}=A$	3p
a)	$A^2-A=O_2$	2p
b)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2-aA)(I_2-bA)=I_2-(a+b)A+abA^2$	2p
	$=I_2-(a+b)A+abA=I_2-(a+b-ab)A$	2p
	$=X(a+b-ab)$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$	1p
c)	$X(0)=I_2$ şi $X(1)\cdot X(b)=X(1+b-b)=X(1)$, pentru orice $b\in\mathbb{R}$	2p
	$X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(2012)=X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(2012)=X(1)$	2p
	$X(1)=I_2-A=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 10 & 5\end{pmatrix}$	1p
2.	$2012^{x*y}=2012^x+2012^y\Rightarrow(x*y)*z=\log_{2012}(2012^x+2012^y+2012^z)=x*(y*z)$	3p
a)	Dacă e ar fi element neutru: $x*e=x\Leftrightarrow 2012^x+2012^e=2012^x\Leftrightarrow 2012^e=0$, imposibil	2p
b)	$(2012+y)*(2012+z)=\log_{2012}\left(2012^{2012}(2012^y+2012^z)\right)$	3p
	$=2012+\log_{2012}(2012^y+2012^z)=2012+(y*z)$	2p
c)	$x*x*x=\log_{2012}(3\cdot 2012^x)=x+\log_{2012}3$	2p
	$\log_{2012}6036=\log_{2012}(3\cdot 2012)=1+\log_{2012}3$	1p
	$x+\log_{2012}3=x+x\log_{2012}3\Leftrightarrow x=1$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$f'(x)=1+\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}=\frac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$, $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$	5p
b)	Pentru $x>0$: $f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$	2p
	Pentru $x<-1$: $2x+1<0$ şi $4(x^2+x)<(2x+1)^2\Rightarrow 2\sqrt{x^2+x}<-(2x+1)\Rightarrow f'(x)<0$	2p
	f este strict descrescătoare pe $(-\infty,-1]$	1p
c)	$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{2}$	2p
	$y=2x+\frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$	1p
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x-\sqrt{x^2+x}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$ asimptotă orizontală spre $-\infty$	2p
2.	$I_0=\int_0^1 dx=1$, $I_1=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x\big\|_0^1=\frac{\pi}{4}$	4p

www.mateinfo.ro

a)	$I_0+I_1=1+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi+4}{4}$	1p
b)	$I_1-I_2=\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\int_0^1 x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$	1p
	$=-\frac{x}{2(x^2+1)}\Big\|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$	3p
	$I_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}=\frac{\pi+2}{8}$	1p
c)	Pentru $x\in(0,1]$: $x^2+1>1\Rightarrow(x^2+1)^n>(x^2+1)^2$, pentru $n\geq 3$	2p
	$\frac{1}{(x^2+1)^n}<\frac{1}{(x^2+1)^2}$, pentru orice $x\in(0,1]$, funcţiile fiind continue	2p
	Prin integrare pe $[0,1]$ obţinem $I_n<I_2$, pentru orice $n\geq 3$	1p

www.mateinfo.ro