BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 24

Prof: Dobre Andrei Octavian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Termenii $1,4,7,\ldots,28$ sunt în progresie aritmetică cu raţia $r=3$, deci sunt 10 termeni	2p
	$10x+\frac{(1+28)\cdot 10}{2}=155\Leftrightarrow 10x+145=155$	2p
	$x=1$	1p
2.	Pentru $m=1$ se obţine $x+2>0$, care nu are loc pentru orice $x\in\mathbb{R}$; deci $m-1>0$ şi $\Delta<0$	2p
	$\Delta=m^2-4(m-1)(m+1)=4-3m^2<0\Leftrightarrow m^2>\frac{4}{3}$	2p
	$m>1$ şi $m^2>\frac{4}{3}\Rightarrow m\in\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$	1p
3.	Condiţii de existenţă: $e^x-1>0\Rightarrow x>0$	1p
	$\ln\left[(e^x-1)(e^x+1)\right]=1\Leftrightarrow e^{2x}-1=e$	2p
	$e^{2x}=e+1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln(e+1)>0$, soluţie	2p
4.	O submulţime cu trei elemente care conţine elementul 1 se obţine alegând celelalte două elemente din mulţimea $\{2,3,4,5,6\}$	2p
	Numărul submulţimilor este $C_5^2=10$	3p
5.	Dreapta BC: $\frac{x-4}{8-4}=\frac{y-6}{10-6}\Leftrightarrow x-y+2=0$	2p
	$A\notin BC$, $d(A,BC)=\frac{\lvert 0-6+2\rvert}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$	2p
	$AA'=2d(A,BC)=4\sqrt{2}$	1p
6.	$AB^2+AC^2=4+12=16=BC^2\Rightarrow$ triunghiul ABC este dreptunghic în A	2p
	AM este mediană corespunzătoare ipotenuzei $\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}=2$, deci $AM=BM=AB=2$	2p
	Triunghiul ABM este echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle BAM)=60^\circ$	1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} = A$	3p
	$A^2 - A = O_2$	2p
b)	$X(a) \cdot X(b) = (I_2 - aA)(I_2 - bA) = I_2 - (a+b)A + abA^2$	2p
	Cum $A^2 = A$, rezultă $X(a) \cdot X(b) = I_2 - (a+b-ab)A = X(a+b-ab)$	3p
c)	$X(a) \cdot X(1) = X(a+1-a) = X(1)$ și $X(1) \cdot X(a) = X(1)$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$	2p
	Înmulțirea matricelor este asociativă $\Rightarrow X(0) \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot \ldots \cdot X(2014) = X(1)$	2p
	$X(1) = I_2 - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$	1p
2. a)	$(x*y)*z = \log_{2014}\left(2014^x + 2014^y + 2014^z\right) = x*(y*z)$, deci legea este asociativă	3p
	Dacă e ar fi element neutru: $x*e = x \Leftrightarrow 2014^x + 2014^e = 2014^x \Leftrightarrow 2014^e = 0$, imposibil	2p
b)	$2014 + (y*z) = \log_{2014} 2014^{2014} + \log_{2014}\left(2014^y + 2014^z\right)$	2p
	$= \log_{2014}\left(2014^{2014} \cdot 2014^y + 2014^{2014} \cdot 2014^z\right) = \log_{2014}\left(2014^{2014+y} + 2014^{2014+z}\right)$	1p
	$= (2014+y)*(2014+z)$, oricare ar fi $y, z \in \mathbb{R}$	2p
c)	$x*x*x = \log_{2014}\left(2014^x + 2014^x + 2014^x\right) = \log_{2014}\left(3 \cdot 2014^x\right)$	2p
	$\log_{2014}\left(3 \cdot 2014^x\right) = \log_{2014} 6042 \Leftrightarrow 3 \cdot 2014^x = 3 \cdot 2014$	2p
	$x = 1$	1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Pentru $x \in (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$: $\left(\sqrt{x^2+x}\right)' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$	2p
	$f'(x) = 1+\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$	3p
b)	Pentru $x>0$: $2x+1>0 \Rightarrow f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$	2p
	Pentru $x<-1$: $4(x^2+x)<(2x+1)^2 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+x}<-(2x+1) \Rightarrow f'(x)<0$	2p
	f este strict descrescătoare pe $(-\infty,-1]$	1p
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x}{x-\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = -\frac{1}{2}$	3p
	Dreapta $y=-\frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$	2p
2. a)	$I_0 = \int_0^1 1\,dx = 1$	2p
	$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big\|_0^1 = \frac{\pi}{4}$	2p
	$I_0+I_1 = 1+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi+4}{4}$	1p
b)	$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = I_1 - \int_0^1 x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$	1p
	$\int_0^1 x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{x}{2(x^2+1)}\Big\|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$	2p
	$I_2 = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8} = \frac{\pi+2}{8}$	2p
c)	Pentru $x\in(0,1]$ și $n\geq 3$: $x^2+1>1 \Rightarrow (x^2+1)^n > (x^2+1)^2$	2p
	$\frac{1}{(x^2+1)^n} < \frac{1}{(x^2+1)^2}$, funcții continue pe $[0,1]$, inegalitate strictă pe $(0,1]$	2p
	Prin integrare pe $[0,1]$: $I_n < I_2$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$	1p

www.mateinfo.ro