BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 26

Prof: Gaga Loghin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Se observă că, în șirul $1,5,9,\cdots$, între oricare 3 termeni a_{k-1},a_k,a_{k+1} ai șirului există relația $a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}=\frac{a_{k-1}+a_{k-1}+8}{2}=a_{k-1}+4=a_k$, deci șirul reprezintă o progresie aritmetică, cu $a_1=1, r=4$. $S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{1+61}{2}\cdot n; a_n=a_1+(n-1)r\Rightarrow 61=1+4(n-1)\Rightarrow n=16$. Deci $S=31\cdot 16=496$	3p 2p
2.	Se vede că obținem $f(4)$ dacă facem $x=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow f(4)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+5=\frac{2}{4}-\frac{3}{2}+5=4$	2p 3p
3.	$\log_{x-2}2+\log_{x-2}8=\log_{x-2}2+3\log_{x-2}2=4\log_{x-2}2$. Deci $4\log_{x-2}2=4\Rightarrow\log_{x-2}2=1\Rightarrow 2=x-2\Rightarrow x=4$	3p 2p
4.	Dacă elementul 1 intră în toate submulțimile, numărul de submulțimi va fi format din combinările de 9 luate câte k, unde $k=\{0,1,2,\cdots,9\}$. Deci numărul de submulțimi este $C_9^0+C_9^1+\cdots C_9^9=2^9=512$.	3p 2p
5.	Doi verctori sunt perpendiculari dacă produsul lor scalar este nul, adică $\overline{v}_1\cdot\overline{v}_2=\overline{0}$ $\overline{v}_1\cdot\overline{v}_2=\overline{0}\Rightarrow 4(m-2)-3(m+1)=0\Leftrightarrow m=11$.	2p 3p

www.mateinfo.ro

6.	$A_{ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot \sin B}{2}$; $A_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, *unde* $p=\frac{AB+BC+AC}{2}=9$	2p
	$\Rightarrow A_{ABC}=\sqrt{9(9-8)(9-6)(9-4)}=3\sqrt{15}$	1p
	Deci, $\sin B=\frac{2A_{ABC}}{AB\cdot BC}=\frac{6\sqrt{15}}{32}=\frac{3\sqrt{15}}{16}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2&0\\0&1\end{pmatrix}$. Observăm că $M^n=\begin{pmatrix}3^n&0\\0&1\end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}^*$.	2p
	Demonstrăm prin inducție.	
	Presupunem adevărat că $M^k=\begin{pmatrix}3^k&0\\0&1\end{pmatrix}$ și demonstrăm $M^{k+1}=\begin{pmatrix}3^{k+1}&0\\0&1\end{pmatrix}$	2p
	$M^{k+1}=M^k\cdot M=\begin{pmatrix}3^k&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{k+1}&0\\0&1\end{pmatrix}$. Deci $M^n=\begin{pmatrix}3^n&0\\0&1\end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}^*$	1p
b)	$\det\begin{pmatrix}3^n&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}3^n&0\\0&1\end{vmatrix}=3^n$	2p
	$7\cdot\det(M^n)-4\cdot 3^n=729\Leftrightarrow 7\cdot 3^n-4\cdot 3^n=729\Leftrightarrow 3^{n+1}=3^6\Rightarrow n=5$	3p
c)	$M+M^2+\cdots+M^{2012}=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3^2&0\\0&1\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}3^{2012}&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+3^2+\cdots+3^{2012}&0\\0&2012\end{pmatrix}$	2p
	$3+3^2+\cdots+3^{2012}=3\cdot\frac{3^{2012}-1}{3-1}=3\cdot\frac{3^{2012}-1}{2}$, fiind suma unei progresii geometrice cu rația 3 și primul termen 3.	2p
	Deci $S=\begin{pmatrix}\frac{3(3^{2012}-1)}{2}&0\\0&2012\end{pmatrix}$	1p
2. a)	$\begin{cases}f(-1)=0\\f(2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2-(m+1)+2n=0\\16-4(m+1)+2n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2n=3\\4m-2n=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=5\\n=4\end{cases}$	5p

www.mateinfo.ro

b)	$x_1^2+x_2^2+x_3^3=4\Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=4$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\dfrac{m+1}{2} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0 \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{(m+1)^2}{4}=4\Rightarrow (m+1)^2=4^2\Rightarrow (m-3)(m+5)=0\Rightarrow m=3$	2p 1p 2p
c)	$2\cdot 625^x-6\cdot 25^x+8=0\Leftrightarrow 2\cdot 5^{4x}-6\cdot 5^{2x}+8=0\Rightarrow 5^{4x}-3\cdot 5^{2x}+4=0$ Notez $5^{2x}=t>0\Rightarrow t^2-3t+4=0;\Delta=9-16<0$ Ecuația nu admite soluții reale.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{\left(e^{x-2}+xe^{x-2}\right)(x-1)^2-2xe^{x-2}(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{e^{x-2}(x-1)\left[(1+x)(x-1)-2x\right]}{(x-1)^4}=$ $=\dfrac{e^{x-2}\left[x^2-2x-1\right]}{(x-1)^3}$	5 p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{x-2}}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{(x-1)^3}{e^{x-2}(x^2-2x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x}{x^2-2x-1}=1$	5 p
c)	Ecuația tangentei într-un punct (x_0,y_0) la graficul funcției f(x) este $y-y_0=m(x-x_0)$, unde $m=f'(x_0)$ și $y_0=f(x_0)$. În cazul nostru $x_0=2, y_0=f(x_0)=f(2)=2;\ m=f'(2)=-1\Rightarrow$ $y-2=-(x-2)\Leftrightarrow x+y-4=0$, care este ecuația tangentei	2 p 2 p 1 p

www.mateinfo.ro

2. a)	$\int_{-1}^{1}\left(x-f\left(x\right)+\ln\left(x+2\right)\right)^{2}dx=\int_{-1}^{1}\left(x-\ln\left(x+2\right)+x+2+\ln\left(x+2\right)\right)^{2}dx=\int_{-1}^{1}\left(2x+2\right)^{2}dx=$ $=4\int_{-1}^{1}\left(x+1\right)^{2}dx=4\frac{\left(x+1\right)^{3}}{3}\Big\vert_{-1}^{1}=\frac{4}{3}\cdot 8=\frac{32}{3}$	5 p
b)	$f'\left(x\right)=\frac{1}{x+2}-1=\frac{1-x-2}{x+2}=\frac{-x-1}{x+2};$ $f''\left(x\right)=\left(\frac{-x-1}{x+2}\right)'=\frac{-x-2+x+1}{\left(x+2\right)^{2}}=-\frac{1}{\left(x+2\right)^{2}}<0$ Deci funcția este concavă pe $\left(-2;\infty\right)$	2 p 2 p 1 p
c)	$A=\int_{1}^{e}g\left(x\right)=\int_{1}^{e}\ln\left(x+2\right)dx=\int_{1}^{e}\left(x\right)'\cdot\ln\left(x+2\right)dx=x\cdot\ln\left(x+2\right)\Big\vert_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\frac{x}{x+2}dx=$ $=e\ln(e+2)-\ln 3-(x-2\ln(x+2))\vert_{1}^{e}=e\ln(e+2)-\ln 3-e+1+2\ln(e+2)-2\ln 3=$ $=(e+2)\ln(e+2)-e+1-3\ln 3$	2 p 3 p

www.mateinfo.ro