BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 30

Prof: Gaga Loghin

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x_1^2+x_2^2=x_1+x_2+2\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1+x_2+2$ $a=1,b=-m,c=-1;\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-m}{1}=m;\ x_1x_2=\frac{c}{a}=-1$ Înlocuind, $\Rightarrow m^2-2(-1)=m+2\Leftrightarrow m^2-m=0\Rightarrow m=0;\ m=1$	3 p 2 p
2.	Metoda 1. Observ că şirul este format din suma numerelor naturale impare, $1+3+5+\cdots+(2n-1)$, pentru care avem relația: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, unde n este numărul de numere. Deci n=2014 Metoda 2. $x_1+x_2+\cdots+x_n=1+3+\cdots+(2n-1)=2014^2$. Ni se sugerează suma unei progresii aritmetice : $x_{n-1}=2n-3, x_n=2n-1, x_{n+1}=2n+1;\frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2}=\frac{2n-3+2n+1}{2}=2n-1=x_n$. Deci elementele șirului formează o progresie aritmetică, cu $x_1=1,x_2=3;r=x_2-x_1=2$ $x_n=x_1+(n-1)r;\ S_n=\frac{x_1+x_n}{2}\cdot n\Rightarrow 2014^2=\frac{1+1+(n-1)\cdot 2}{2}\cdot n;$ $2014^2=\frac{2(1+n-1)}{2}\cdot n\Rightarrow 2014^2=n^2\Rightarrow n=2014$	1 p 2 p 2 p
3.	Metoda 1. $\sqrt{3}=tg60^0=\frac{\sin 60^0}{\cos 60^0};\ \cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y=\cos(x+y)$ $\frac{\sin 60^0}{\cos 60^0}\cdot\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow \sin 60^0\cdot\sin x-\cos 60^0\cdot\cos x=\cos 60^0\ \ \vert\cdot(-1)$	1 p 2 p 2

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow \cos\left(60^0+x\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{\pi}{3}+x=\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\pi-\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ sau $\frac{\pi}{3}+x=\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\pi$ Metoda 2. Ecuația se mai scrie: $\sqrt{3}\cdot\sin x=1+\cos x$; dar $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$, iar $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ $\Rightarrow 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\right)=0$ $\Rightarrow \cos\frac{x}{2}=0; x=\pi,\ \cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}=0, tg\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$	p
4.	Notez cu x prețul produsului. $x+\frac{24}{100}x=372$ $\frac{124}{100}x=372\Rightarrow x=372\cdot\frac{100}{124}; x=300$	2p 3p
5.	$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow 3a-(a-1)(3a-1)=0$ $\Leftrightarrow 3a-\left(3a^2-4a+1\right)=0\Leftrightarrow 3a^2-7a+1=0\Rightarrow a_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{37}}{6}$	2p 3p
6.	$S=\sin^2 1^0+\sin^2 2^0+\cdots+\sin^2 90^0=$ $=\sin^2 1^0+\sin^2 89^0+\sin^2 2^0+\sin^2 88^0+\cdots+\sin^2 44^0+\sin^2 46^0+\sin^2 45^0+\sin^2 90^0$ $=\sin^2 1^0+\sin^2\left(90^0-1^0\right)+\sin^2 2^0+\sin^2\left(90^0-2^0\right)+\cdots+\sin^2 44^0+\sin^2\left(90^0-46^0\right)+\sin^2 45^0+\sin^2 90^0$ $=\left(\sin^2 1^0+\cos^2 1^0\right)+\left(\sin^2 2^0+\cos^2 2^0\right)+\cdots+\left(\sin^2 44^0+\cos^2 44^0\right)+\sin^2 45^0+\sin^2 90^0$ $=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{44\ ori}+\frac{1}{2}+1=45+\frac{1}{2}=\frac{91}{2}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^3=A^2\cdot A$	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$	2p
b)	$A^t=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$	1p
	$A+A^t+I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$	1p
	$d=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$. Se observă că toți determinanții de ordinal 2 sunt nuli și determinantul de ordinal 1 este $d_1=1\neq 0\Rightarrow$ rang $A+A^t+I_3$ este 1	3p
c)	Fie $B=A+I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$	1p
	$\det(A+I_3)=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow\exists(A+I_3)^{-1}$ și $B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot B^*$.	1p
	Pentru a determina matricea adjunct, B^*, se construiește transpusa matricei , $B^t=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	1p
	Pe baza ei construim B^*, care este matricea complementților algebrici ai matricei B^t:	1p
	$\delta_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1;\delta_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}=0;\delta_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}=0$	

www.mateinfo.ro

	$\delta_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1;\delta_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1;\delta_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}=0$ $\delta_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0;\delta_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1;\delta_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$ $\Rightarrow B^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{1}\cdot B^*=B^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$	1p
2.	Fie $g=X^2-1$, cu soluțiile $x=1, x=-1$.	2p
a)	$g\mid f\Rightarrow\begin{cases}f(1)=0\\f(-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+2=0\\-a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-2\\-a+b=0\end{cases}\Rightarrow b=-1, a=-1$	3p
b)	$x_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Formez ecuația de gradul 2 care are rădăcinile x_1, x_2 și forma: $x^2-Sx+P=0\Rightarrow g=X^2-Sx+P$.	1p
	$S=x_1+x_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1;\ P=x_1\cdot x_2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1\Rightarrow g=X^2-X+1$	2p
	F și g au două rădăcini comuni, deci $g\mid f$. efectuăm împărțirea și obținem restul $b-a=0\Rightarrow b=a\Rightarrow f=X^4-4X^3+X-4$	2p
c)	Petru a=-4, polinomul devine : $f=X^4-4X^3+X-4$	1p
	Calculăm expresia și obținem: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=\frac{(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)^2-2x_1x_2x_3x_4(x_1x_2+x_1x_3+\cdots)}{(x_1x_2x_3x_4)^2}$	2p
	Relațiile lui Viete : $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=4\\x_1x_2+x_1x_3+\cdots=0\\x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-1\\x_1x_2x_3x_4=-4\end{cases}$	
	Deci $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=\frac{(-1)^2-2\cdot(-4)\cdot 0}{(-4)^2}=\frac{1}{16}$	1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Calculăm derivata I. $f'(x)=\dfrac{\left(x^2-x+1\right)'\cdot(x+1)-\left(x^2-x+1\right)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$ Pentru $x\in(0,\infty)$ semnul derivatei I este: $f'(x)\le 0,\ pt.\ x\in\left(0,-1+\sqrt{3}\right)\Rightarrow f(x)$ descrescătoare $f'(x)>0,\ pt.\ x\in\left(-1+\sqrt{3},\infty\right)\Rightarrow f(x)$ crescătoare.	2p 3p
b)	$f''(x)=\dfrac{(2x+2)(x+1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=$ $=\dfrac{2(x+1)\left(x^2+2x+1-x^2-2x+2\right)}{(x+1)^4}=\dfrac{6}{(x+1)^3}>0$ Deci f(x) este strict convexă pentru $x\in(0,\infty)$	1p 1p 1p 2p
c)	Știm că $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$ (inegalitatea mediei). Deoarece, f(x) strict crescătoare, pe $\left(-1+\sqrt{3},\infty\right)\Rightarrow f\left(\sqrt{ab}\right)\le f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ Deoarece f(x) convexă pentru $x\in\left(-1+\sqrt{3},\infty\right),\Rightarrow\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\ge f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.	2p 1p 2p
2. a)	$I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\left(x^3+1\right)'}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\varphi'}{\varphi}dx=\frac{1}{3}\ln\lvert\phi\rvert\Big|_0^1=$ $=\dfrac{1}{3}\ln\left(1+x^3\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}(\ln 2-\ln 1)=\dfrac{\ln 2}{3}$	3p 2p

www.mateinfo.ro

b)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^{n+1}<x^n \Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{1+x^3}<\frac{x^n}{1+x^3}\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^3}dx<\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3}dx$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^3}dx<\lim\limits_{n\to\infty} I_n<\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^3}dx$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$ $\Rightarrow I_{n+1}<I_n$, **deci șirul este strict descrescător.**	3p 2p
c)	Conform punctului b), $I_{n+1}<I_n<I_{n-1}$. Trecând la limită, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^3}dx<\lim\limits_{n\to\infty} I_n<\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^3}dx$ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$	2p 3p

www.mateinfo.ro