BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 32

Prof: Gaga Loghin.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_3^2 = b_2 \cdot b_4 = 7 \cdot 28 = 196 \Rightarrow b_3 = \pm 14$	2p
	$q = \frac{b_3}{b_2} = \pm 2;$	2p
	$7 = b_1 \cdot q \Rightarrow b_1 = \frac{7}{q} = \pm \frac{7}{2}$	1p
2.	$f(1) = 5^1 + \log_5 1 = 5$	2p
	$f(f(1)) = f(5) = 5^5 + 1 = 3126$	3p
3.	În binomul $(a+b)^n$, termenul T_{k+1} se scrie $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$	1p
	$\Rightarrow T_{k+1} = C_9^k \left(2012 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^{9-k} \left(\frac{2012}{\sqrt{x}}\right)^k$, $9 \geq k \Rightarrow k \in \{0,1,\cdots,9\}$	1p
	$T_{k+1} = C_9^k 2012^{9-k} \cdot x^{\frac{9-k}{4}} \cdot 2012^k \cdot x^{-\frac{k}{2}} = 2012^9 \cdot x^{\frac{9-k}{4} - \frac{k}{2}}$ Trebuie să avem	2p
	$\frac{9-k}{4} - \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow 9 - 3k = 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow T_4 = C_9^3 \cdot 2012^9 = 84 \cdot 2012^9$	1p
4.	$p = \frac{c_f}{c_p}$; $c_p = 3^3 = 27$.	1p
	Numărul de cazuri favorabile este $3 \cdot 2 \cdot 1$, deci $c_f = 6$, iar	2p

	$p=\frac{c_f}{c_p}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}=0,(2)$	2p
5.	Centru paralelogramului se găsește la intersecția diagonalelor AC și BD. Fie O acest centru. Atunci $x_O=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=0;\ y_O=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$ $x_O=\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{3+n}{2}=0\Rightarrow n=-3\Rightarrow D(-3,5);$ $y_O=\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{m+5}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow m=2\Rightarrow B(3,2)$	2p 1p 2p
6.	$tgC=tg(\pi-A-B)=tg\left[\pi-(A+B)\right]-tg(A+B)$ $\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B}=\frac{22+8+5\sqrt{3}}{11-16-10\sqrt{3}}=\frac{30+5\sqrt{3}}{-5-10\sqrt{3}}=$ $=-\frac{6+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}=-\frac{(6+\sqrt{3})(2\sqrt{3}-1)}{11}=-\frac{11\sqrt{3}}{11}=-\sqrt{3}$ $\operatorname{tg}C=-\operatorname{tg}(A+B)=\sqrt{3}\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\ A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $A^3-A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A^2-I_3$	5p
b)	Prin inducție. Egalitatea se verifică, conform punctului a). Presupun că $P(n):A^n-A^{n-2}=A^2-I_3$ $P(n+1):$ și demonstrez $A^{n+1}-A^{n-1}=A\left(A^n-A^{n-2}\right)=A\left(A^2-I_3\right)=A^3-A=A^2-I_3$	2p

www.mateinfo.ro

	$P(n+1): A^{n+1}-A^{n-1}=A^2-I_3$. Într-adevăr, avem: $A^{n+1}-A^{n-1}=A\left(A^n-A^{n-2}\right)=A\left(A^2-I_3\right)=A^3-A=A^2-I_3$, conform a)	2p
c)	Observăm că se verifică pentru n=1. Presupunem adevărată pentru pentru valorile mai mici și egale cu n-1 și demonstrăm pentru n. notăm cu S_n suma elementelor. Din $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3\Rightarrow A^n=A^{n-2}+A^2-I_3\Rightarrow S_n=n-2+3+2+3-3=n+3$ $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3\Rightarrow A^n=A^{n-2}+A^2-I_3$ $\Rightarrow S_n=n-2+3+2+3-3=n+3$	2p 2p
2. a)	$x*y=2xy-4x-4y+8+5a-8=2x(y-2)-4(y-2)+5a-8=$ $=2(x-2)(y-2)+4(a-2)+a>a,\ \forall a>2$	5p
b)	Se verifică imediat că operația este corect definită, că este asociativă și comutativă. Elementul neutru este unic și avem: $x*e=x\Rightarrow 2xe-4x-4e+5a=x\Leftrightarrow 2e(x-2)=5(x-a)\Rightarrow a=2$ și $e=\frac{5}{2}$ Elementul simetrizabil se verifică imediat	2p 3p
c)	f este bijectivă, fiind funcție de gradul I, strict crescătoare. $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$ Verificăm relația $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ Deci grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe.	2p 3p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{x+3}{3-x}\right)'}{\dfrac{x+3}{3-x}}=\dfrac{3-x+x+3}{(3-x)^2}\cdot\dfrac{3-x}{x+3}=\dfrac{6}{9-x^2}>0,\forall x\in(-3,3)$ Deci $f(x)$ este strict crescătoare pentru $x\in(-3,3)$	3p 2p
b)	1. asimptote orizontale nu există, pentru că nu se pune problema calculului limitei la $\pm\infty$; 2. asimptote oblice, nu există; din aceleași rațiuni ($x\in(-3,3)$) 3. asimptote vericale: $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\ln\dfrac{x+3}{3-x}=\ln 0=-\infty$. Deci $x=-3$ este asimptotă verticală la dreapta. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\ln\dfrac{x+3}{3-x}=\ln\infty=\infty$. Deci $x=3$ este asimptotă verticală la stânga.	1p 1p 3p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{\frac{1}{x}+3}{3-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{3x+1}{3x-1}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^x=1^\infty$ $\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x+1}{3x-1}-1\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x+1-3x+1}{3x-1}\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x-1}\right)^x$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{3x-1}{2}}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{3x-1}{2}}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$	2p 3p
2. a)	$I_0=\int_0^1\dfrac{\ln 2}{x^2+1}dx=\ln 2\cdot\int_0^1\dfrac{1}{x^2+1}dx=\ln 2\cdot arctgx\Big\|_0^1=\dfrac{\pi}{4}\cdot\ln 2$	5p

www.mateinfo.ro

b)	Deoarece $x\in(0,1)\Rightarrow x^n>x^{n+1}$, iar $\frac{1}{x^2+1}>0$ $\Rightarrow \frac{\ln\left(x^n+1\right)}{x^2+1}>\frac{\ln\left(x^{n+1}+1\right)}{x^2+1}, \forall x\in(0,1)\Rightarrow I_n>I_{n+1}\Rightarrow$ $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln\left(x^n+1\right)}{x^2+1}dx>\int_0^1 \frac{\ln\left(x^{n+1}+1\right)}{x^2+1}dx, \forall x\in(0,1)\Rightarrow I_n>I_{n+1}\Rightarrow$ șirul este descrescător.	2p 3p
c)	$0\le I_n=\int_0^1 \frac{\ln\left(x^n+1\right)}{x^2+1}dx\le\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$	5p

www.mateinfo.ro