BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 51

Prof: Nicolaescu Nicolae

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x^3=\frac{x+5x+4}{2}\Rightarrow x^3-3x-2=0$ $(x+1)(x^2-x-2)=0\Rightarrow x_{1,2}=-1,\ x_3=2$	2p 3p
2.	$A_n^3=n,\ n\in N, n\geq 3\Rightarrow n(n-1)(n-2)=6n\Rightarrow n^2-3n-4=0$ $n_1=4,\ n_2=-1\notin N$ $S=\{4\}$	2p 2p 1p
3.	Condiţii: $\begin{cases}3-x\geq 0\\5x+9\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in\left[-\frac{9}{5},3\right]=D$ Ridicăm la pătrat ambii membri ai egalităţii $\Rightarrow 3-x+2\sqrt{(3-x)(5x+9)}+5x+9=4\Rightarrow\sqrt{(3-x)(5x+9)}=2-2x$ Ridicăm din nou la pătrat ambii membri ai egalităţii $9x^2-14x-23=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=\frac{23}{9}\in D$ dar $x_2=\frac{23}{9}$ nu verifică ecuaţia deci S={-1}	1p 2p 2p
4.	$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}\in\left\{\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2k\pi, k\in Z\right\}$ $\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z\right\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi, k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi, k\in Z\right\}$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

	$x\in[0,2\pi)\Rightarrow x\in\left\{\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right\}$	
5.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cdot\cos\left(\measuredangle BAD\right)$ $\cos 75^o=\cos\left(45^o+30^o\right)=\cos 45^o\cos 30^o-\sin 45^o\sin 30^0=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cdot\cos\left(\measuredangle BAD\right)=24\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=6\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	2p 2p 1p
6.	$-1\le x^2+x+1\le 1\Rightarrow\begin{cases}x^2+x+2\ge 0\\ x^2+x\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in R\\ x\in[-1,0]\end{cases}$ În final $x\in[-1,0]$	4p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}-4&1\\-4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&1\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-3\\12&-3\end{pmatrix}$ $-3A=\begin{pmatrix}12&-3\\12&-3\end{pmatrix}$ deci $A^2=-3A\Rightarrow A\in M$	2p 2p 1p
b)	Fie $A\in M\Rightarrow A^2=-3A$ $\det A^2=\det(-3A)\Rightarrow(\det A)^2=9\det A$ deci $\det A=0$ sau $\det A=9$	1p 2p 2p
c)	$A^2-trA\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2$ $-3A-trA\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2\Rightarrow -3A-trA\cdot A=O_2\Rightarrow(-3-trA)A=O_2$ $A\neq O_2$ deci $trA=-3$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

2. a)	$m_{AB}=\frac{3-1}{2-(-1)}=\frac{2}{3}, m_{CD}=\frac{-2-0}{-2-1}=\frac{2}{3}\Rightarrow AB//CD$ (1) $m_{BC}=\frac{0-3}{1-2}=3, m_{AD}=\frac{-2-1}{-2-(-1)}=3\Rightarrow BC//AD$ (2) Din (1) şi (2) obţinem că ABCD paralelogram	2p 2p 1p
b)	$A_{ABCD}=2\cdot A_{ABC}$ $=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{Vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{Vmatrix}=7$	2p 3p
c)	Ecuaţia dreptei BC: $\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-3}{0-3}\Rightarrow 3x-y-3=0\Rightarrow M(\alpha,3\alpha-3)$ $\lvert AM\rvert=\sqrt{(\alpha+1)^2+(3\alpha-4)^2}=\sqrt{5}\Rightarrow 10\alpha^2-22\alpha+17=5$ $\alpha_1=1, \alpha_2=\frac{6}{5}\Rightarrow M\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{1}{1+\frac{2012}{x}}\cdot\frac{-2012}{x^2}=\frac{-2012}{x(x+2012)}$ $f''(x)=\frac{4024(x+1006)}{x^2(x+2012)^2}>0,\ \forall x\in(0,\infty)$ Deci f' este crescătoare pe $(0,\infty)$	2p 2p 1p
b)	Cazul 1^∞ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f(n)\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)\right]^{\frac{1}{\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)}\cdot n\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)}$	2p

www.mateinfo.ro

	$\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{Cazul\ \frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+2012}\cdot\frac{-2012}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2012n}{n+2012}=2012$ Rezultatul final este e^{2012}.	2p 1p
c)	f continuă pe [1,2] şi derivabilă pe (1,2) Aplicăm teorema lui Lagrange şi rezultă că $\exists c\in(1,2)$ astfel încât $f(2)-f(1)=f'(c)$ $\ln(1007)-\ln(2013)=\frac{-2012}{c(c+2012)}\Rightarrow\frac{2012}{c(c+2012)}=-\ln\frac{1007}{2013}$	1p 1p 3p
2. a)	$I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(1-3x^2\right)dx=\left(x-x^3\right)\Big\|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{27}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$	5p
b)	$I_n-I_{n+1}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left[\left(1-3x^2\right)^n-\left(1-3x^2\right)^{n+1}\right]dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(1-3x^2\right)^n 3x^2dx>0$ Deci şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi deoarece $\left(1-3x^2\right)^n\geq 0\Rightarrow I_n\geq 0$ deci şirul este mărginit. Deoarece şirul este monoton şi mărginit ,rezultă $(I_n)_{n\geq 1}$ convergent	2p 2p 1p
c)	$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(1-3x^2\right)^n x'dx=x\left(1-3x^2\right)^n\Big\|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-n\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}x\left(1-3x^2\right)^{n-1}(-6x)dx$ $I_n=-2n\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(1-3x^2\right)^{n-1}\left(1-3x^2-1\right)dx\Rightarrow I_n=-2nI_n+2nI_{n-1}\Rightarrow I_n(2n+1)=2nI_{n-1}$ $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2}=\frac{4n^2-4n}{4n^2-1}I_{n-2}$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro