BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 65

Prof: RICU ILEANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$100^{\lg 2} \overset{notam}{=} a \Rightarrow \left(folosim\ operatia\ de\ \log aritmare \right) \Rightarrow \lg 2 \cdot \lg 100 = \lg a \Rightarrow$ $2\lg 2 = \lg a \Rightarrow \lg\left(2^2\right) = \lg a \Rightarrow a = 2^2 = 4$ $\sqrt[3]{-27} = -3$ Finalizare:A=4-3=1$\in \mathbb{N}$	3p 1p 1p
2.	Ecuatia devine $\sqrt{1-x^2} = 1-x(*)$ Cond.ca radicalul sa fie corect definit: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;1] \\ x \in (-\infty;1] \end{cases} \Rightarrow x \in [-1;1]$ Ridicând la pătrat în ambii membri ai ec. $(*)$ obţinem $1-x^2 = 1-2x+x^2$ $\Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow S = \{0;1\}$	1p 2p 2p
3.	Graficul ei taie axa Oy în punctul 1 $\Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$ $x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{4}{2a} \Rightarrow -\frac{4}{2a} = -\frac{2}{3} \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$ Finalizare: f (x) = $3x^2 + 4x + 1$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

4.	Avem coordonatele punctelor A(2;0);B(1;-1);C(1;1)$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=-\vec{i}+\vec{j}$; $\overrightarrow{AB}=-\vec{i}-\vec{j}$ Produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)\cdot\left(-\vec{i}-\vec{j}\right)=(-1)\cdot(-1)+1\cdot(-1)=1-1=0\Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}$ Calculăm laturile: $BA=\sqrt{(2-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{2}$; $CA=\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$	2p 2p 1p
5.	$\frac{4}{m-1}=\frac{m+1}{2}\Rightarrow$ $m^2-1=8\Rightarrow m^2-9=0\Rightarrow m_{1,2}=\pm 3$	2p 3p
6.	$y-y_0=m(x-x_0)$ $m=tg30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $y-6=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}10 & 30\\ 5 & 15\end{pmatrix}$ $5A=\begin{pmatrix}10 & 30\\ 5 & 15\end{pmatrix}$ Finalizare	2p 2p 1p
b)	Verificare: $A^2=5A$ (conform pct.a); $A^3=A^2\cdot A=5A\cdot A=5A^2=5\cdot 5A=5^2\cdot A$ $P(k)\Rightarrow P(k+1): A^{k+1}=A^k\cdot A=5^{k-1}A\cdot A=5^{k-1}A^2=5^{k-1}\cdot 5A=5^k\cdot A$ $\Rightarrow P(n)$ adevarata $\forall n\in\mathbb{N}^*$	2p 3p

www.mateinfo.ro

c)	$A-A^2+A^3-.....+(-1)^{99}A^{100} \overset{folos.pct.b)}{=} A-5A+5^2A-5^3A+.....+(-1)^{99}5^{99}A=$ $=A\left(1-5+5^2-5^3+.....+(-1)^{99}5^{99}\right) \underset{q=-5}{=} A\cdot\frac{(-5)^{100}-1}{-5-1}=A\frac{5^{100}-1}{-6}=-\frac{5^{100}-1}{6}\cdot A$ Finalizare: toate elementele matricei devin strict negative prin inmultirea elementelor din A cu o fractie negativa	2p 2p 1p
2. a)	Calculăm $2(x-3)(y-3)+3=2(xy-3x-3y+9)+3=2xy-6x-6y+18+3=2xy-6x-6y+21=$ $=x\circ y,\forall x,y\in\mathbb{R}$	3p 2p
b)	$(x\circ y)\circ z=\underset{not.a}{\left(2xy-6x-6y+21\right)}\circ z=a\circ z=2az-6a-6z+21=$ $=2(2xy-6x-6y+21)z-6(2xy-6x-6y+21)-6z+21=$ (1) $=4xyz-12xy-12xz-12yz+36x+36y+36z-105,\forall x,y\in\mathbb{R}$ $x\circ(y\circ z)=x\circ\underset{not.b}{\left(2yz-6y-6z+21\right)}=x\circ b=2xb-6x-6b+21=$ $=2x(2yz-6y-6z+21)-6x-6(2yz-6y-6z+21)+21=$ (2) $=4xyz-12xy-12xz-12yz+36x+36y+36z-105,\forall x,y\in\mathbb{R}$ Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ asociativitatea	2p 2p 1p
c)	$x\circ x\underset{cf.a)}{=}2(x-3)(x-3)+3=2(x-3)^2+3$ $x\circ x\circ x\underset{cf.b)}{=}(x\circ x)\circ x=\left(2(x-3)^2+3\right)\circ x=2\left(2(x-3)^2+3-3\right)(x-3)+3=$ $=2\cdot2(x-3)^2(x-3)+3=2^2(x-3)^3+3$ $\Rightarrow \underbrace{x\circ x\circ.....\circ x}_{de\,n\,ori}=2^{n-1}(x-3)^n+3$ (dem.prin inducţie matematică)(propozitia P(n)) P(k) $\Rightarrow$ P(k+1)	1p 1p

www.mateinfo.ro

	P(k+1): $\underbrace{x\circ x\circ .....\circ x}_{de\,k+1\,ori}=\left(\underbrace{x\circ x\circ .....\circ x}_{de\,k\,ori}\right)\circ x=\left(2^{k-1}(x-3)^k+3\right)\circ x=a\circ x=2(a-3)(x-3)+3=$ $=2\left(2^{k-1}(x-3)^k+3-3\right)(x-3)+3=2\cdot 2^{k-1}(x-3)^k(x-3)+3=2^k(x-3)^{k+1}+3$	2p
	$\Rightarrow$ propozitia P(n) este adevărată	
	Ecuaţia devine: $\underbrace{x\circ x\circ .....\circ x}_{de\,2012\,ori}=3\Leftrightarrow 2^{2012-1}(x-3)^{2012}+3=3\Leftrightarrow 2^{2011}(x-3)^{2012}=0\Leftrightarrow$ $(x-3)^{2012}=0\Rightarrow x_1=x_2=.....=x_{2012}=3\Rightarrow$	
	Valoarea de adevar:fals	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=e^x(4-e^x)+e^x(-e^x)=$ $=e^x(4-e^x-e^x)=e^x(4-2e^x)=2e^x(2-e^x)$	3p 2p
b)	Not.cu *d* tangenta la curba $\mathcal{C}$ a funcţiei f în punctul P ;cum $d\parallel Ox\Rightarrow m_d=m_{Ox}=0$	2p
	Dar $m_d=0\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 2\cdot e^x(2-e^x)=0$	
	$\Rightarrow e^x=0$ (ecuatia nu are solutii reale)	
	Sau $2-e^x=0\Rightarrow e^x=2\Rightarrow$ x=ln2	2p
	Calculăm $f(\ln 2)=e^{\ln 2}(4-e^{\ln 2})=2(4-2)=4\Rightarrow$ P(ln2;4)	1p
c)	Studiem monotonia funcţiei f :	

www.mateinfo.ro

$f'(x)=2e^x\left(2-e^x\right)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\ln 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0(4-0)=0$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty(4-\infty)=\infty\cdot(-\infty)=-\infty$ — 2p

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$	++++++++++++++++++	0	- -		
$f(x)$	0 ↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗		maxim 4	↘↘↘↘↘↘↘↘↘↘↘↘↘↘	$-\infty$

2p

$\Rightarrow$ monotonia lui $f\Rightarrow f(x)\le 4,\forall x\in\mathbb{R}$ — 1p

2.

a)

$f_1(x)-f_2(x)=\dfrac{\ln x(1-\ln x)}{x^2}\overset{not.F}{=}F(x)$;studiem semnul lui F pe domeniul $(0;+\infty)$ — 2p

f(x)=0 $\Rightarrow$ x=1;x=e

x	0		1		e		$+\infty$
lnx		- - - - - - - -	0	++++++++++++++++++++++++++++++++			
1-lnx		++++++++++++++++++++++	0	- - - - - - - - - - - - - - - - -			
x^2		++					
F(x)		- - - - - - - -	-0	++++++++++++++	0	- - - - - - - - - - - - - - - - - -	

2p

$\Rightarrow f_1(x)-f_2(x)=F(x)\ge 0,\forall x\in[1;e]$ — 1p

b)

Din a) $\Rightarrow f_1(x)\ge f_2(x),\forall x\in[1;e]\Rightarrow$ — 2p

$A_{\Gamma_{f_1;f_2}}=\int_1^e\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx-\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x^2}dx\overset{not.}{=}I_1-I_2\,(*)$

Folosim metoda integrarii prin parti $\Rightarrow I_1=-\dfrac{2}{e}+1\,;I_2=-\dfrac{5}{e}+2\,;$ — 2p

Finalizare: $A_{\Gamma_{f_1;f_2}}=I_1-I_2=\dfrac{3}{e}-1$ — 1p

www.mateinfo.ro

c)	$V_{C_g}=\pi\int_1^e g^2(x)\,dx=\pi\int_1^e\frac{\left(\ln x-\ln^2 x\right)^2}{x}dx=\pi\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{x}-2\frac{\ln^3 x}{x}+\frac{\ln^4 x}{x}\right)dx=\pi\left(I_3-2I_4+I_5\right)$ Folosim metoda integrarii prin parti $\Rightarrow I_3=\frac{1}{3};I_4=\frac{1}{4};I_5=\frac{1}{5}\Rightarrow$ $V_{C_g}=\pi\left(I_3-2I_4+I_5\right)=\frac{\pi}{30}$	2p 3p

www.mateinfo.ro