BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 66

Prof: RICU ILEANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z_1=\bar{z}_2 \Rightarrow (x+1)+yi=(y-1)-(x-4)i \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x+1=y-1 \\ y=-x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=4 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$	2p 2p 1p
2.	Stim ca functia de grad I este bijectiva $\Rightarrow$ f este inversabila f surjectiva $\Leftrightarrow \forall y\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R} astfel\ încât\ f(x)=y \Leftrightarrow 3x+6=y \Leftrightarrow x=\frac{y-6}{3}$ $\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{y-6}{3}$ sau $f^{-1}(x)=\frac{x-6}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-2$ $\Rightarrow 2m-1=\frac{1}{3} \Rightarrow m=\frac{2}{3}$	2p 2p 1p
3.	Cond.ca logaritmii sa fie corect definiti: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-2 \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;\infty)$ $\log_2(x+1)-\log_2(x+2)=1 \Leftrightarrow \log_2\frac{x+1}{x+2}=1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2}=2$ $x+1=2(x+2) \Leftrightarrow x=-3\notin(-1,+\infty) \Rightarrow S=\varnothing$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

4.	$T_5 = C_n^4 \left(\sqrt[3]{x}\right)^{n-4} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 = C_n^4 x^{\frac{n-4}{3}} \cdot x^{-4} = C_n^4 x^{\frac{n-16}{3}}$; $\Rightarrow \frac{n-16}{3} = 0 \Rightarrow n = 16$ Finalizare: $A_{16}^2 = 16 \cdot 15 = 240$	2p 2p 1p
5.	Notăm $\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j}; x, y \in \mathbb{R}$ $\left\|\vec{b}\right\| = 30 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 30 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 900 (1)$ $\vec{b}$ coliniar cu $\vec{a} \Leftrightarrow \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{y}{-1} \Rightarrow x = -2\sqrt{2}y (2)$ Înlocuim (2) în (1) $\Rightarrow y = \pm 10 \Rightarrow x = \mp 20\sqrt{2}$ Finalizare: $\vec{b_1} = -20\sqrt{2}\ \vec{i} + 10\vec{j}$ si $\vec{b_2} = 20\sqrt{2}\ \vec{i} - 10\vec{j}$	2p 2p 1p
6.	$f(x+\pi) = \cos 2(x+\pi) = 2\cos^2(x+\pi) - 1 = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x = f(x)$ $\Rightarrow$ f(x) – f(x + π)= f(x) – f(x)=0.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Not.cu $A \in G, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $AJ = JA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$	3p

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow \begin{cases} -b=c \\ a=d \\ -d=-a \\ c=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-b \\ d=a \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R}$	2p
b)	Fie $A \in G \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R}$ (conform pct.a) Calculăm $a \cdot I_2 + b \cdot J = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = A$	2p 3p
c)	Cum $X \in G \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R} (cf.pct.a) \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$ Ecuaţia $X^2+J=O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab+1 \\ -2ab-1 & a^2-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)(a-b)=0 \\ 2ab+1=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ a=b sau a= -b Pentru a=b $\Rightarrow 2b^2+1=0$ (ec.nu are solutii reale) Pentru a= -b $\Rightarrow -2b^2+1=0 \Rightarrow \begin{cases} b_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_1=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b_2=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_2=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ Avem $X_1=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; $X_2=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$	1p 2p 2p
2. a)	$x*2=2x-2x-4+6=2$ $3 \circ x=3x-3(3+x)+12=3$ $(x*2)-(3 \circ x)=2-3=-1$	2p 2p 1p
b)	$e_1*x=x*e_1=x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e_1(x-2)=3(x-2), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e_1=3$	2p

www.mateinfo.ro

	$e_2 \circ x = x \circ e_2 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e_2(x-3) = 4(x-3), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e_2 = 4$ $e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2 . e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2 = (3\cdot 4 - 2\cdot 3 - 2\cdot 4 + 6) + (12 - 3(3+4) + 12) = 4 + 3 = 7$	2p 1p
c)	$f(x*y) = a(x*y) + 1 = a(xy - 2x - 2y + 6) + 1 = axy - 2ax - 2ay + 6a + 1 (1)$ $f(x) \circ f(y) = f(x) \cdot f(x) - 3(f(x) + f(y)) + 12 = (ax+1)(ay+1) - 3(ax+1+ay+1) + 12 =$ $= a^2 xy - 2ax - 2ay + 7 (2)$ Din (1)şi (2) $\Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ 6a + 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0; a_2 = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow$ a=1	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ x | $-\infty$ | 0 | e | $+\infty$ $1-\ln x$ | | +++++++++0- x^2 | | ++ $f'(x)$ | | +++++++++0- $f(x)$ | | $\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow \frac{1}{e} \searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$ $\Rightarrow$ monotonia lui f	2p 2p 1p
b)	Asimptota orizontală: $\lim_{x\to\infty} f(x) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'Hospital}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ ecuatia asimptotei orizontale spre $+\infty$ este y=0	2p

www.mateinfo.ro

	Asimptota verticala: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=+\infty\cdot(-\infty)=-\infty \Rightarrow$ ecuatia asimptotei verticale este x=0	3p
c)	Conform punctului *a)* $\Rightarrow$ $f(x)\le\frac{1}{e},\forall x\in(0,+\infty)$ Conform punctului *b)* unde y=0 este ecuatia asimptotei orizontale spre $\infty\Rightarrow$ $f(x)>0,\forall x\in(e,+\infty)$ $\Rightarrow 0<f(x)\le\frac{1}{e},\forall x\in(e,+\infty)$	2p 2p 1p
2. a)	$F'(x)=(x\cdot e^x)'=x'\cdot e^x+x\cdot(e^x)'=e^x+x\cdot e^x=$ $=e^x(1+x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$	3p 2p
b)	Observăm că F(x)≥0 , $\forall x\in[0;1]$ $\Rightarrow S=\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 x\cdot e^x dx=_{\text{prin parti}}$ $=x\cdot e^x\Big\|_0^1-\int_0^1 e^x dx=1\cdot e-0-e^x\Big\|_0^1=e-(e-1)=e-e+1=1$	1p 2p 2p
c)	$\int_0^1\frac{F(x)-f(x)}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{x\cdot e^x-(x+1)e^x}{e^x+1}dx=-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=$ $=-\ln\left\|e^x+1\right\|_0^1=-\ln(e+1)+\ln 2=\ln\frac{2}{e+1}$	3p 2p

www.mateinfo.ro