BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 79

Prof: Stan Adrian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}=7-4\sqrt{3}$, $\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^2}=7-4\sqrt{3}$. $a=0\in\mathbb{Z}$;	2p 2p 1p
2.	Din $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\Rightarrow$ $\frac{x^2-6+4x+3}{2}=3x\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x\in\{-1;3\}$.	1p 2p 2p
3.	$-\frac{\Delta}{4a}=1\Leftrightarrow$ $-\frac{5m^2+10m+9}{4m}=1$ $\Rightarrow 5m^2+14m+9=0\Rightarrow m\in\left\{-\frac{9}{5},-1\right\}$	1p 2p 2p
4.	Ecuaţia dată este echivalentă cu $2x^2+3x+1=0$. $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{2}$.	2p 3p
5.	Vectorii $\vec{v_1},\vec{v_2}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow\frac{a-2}{-8}=\frac{-4}{a+2}$ Din $a^2-4=32\Rightarrow a\in\{-6;6\}$.	2p 3p
6.	Se scrie mai întâi ecuaţia dreptei (AB), după formula $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Rezultă, $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1-2}\Rightarrow x+y-1=0$. Distanţa de la punctul $C(4;3)$ la dreapta AB este dată de formula $d(C,AB)=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

	şi este egală cu $\frac{\lvert 4+3-1\rvert}{\sqrt{1+1}}=3\sqrt{2}$.	

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2-aA)(I_2-bA)=I_2-bA-aA+abA^2=I_2-(a+b-ab)A=X(a+b-ab)$, deoarece $A^2=A$; Cum $X(a)\cdot X(1)=X(a+1-a\cdot 1)=X(1),\forall a\in\mathbb{R}$ şi $1\in\{0;1;2;...,2014\}\Rightarrow$ $X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot ...\cdot X(2014)=X(1)=I_2-A=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 10 & 5\end{pmatrix}$;	2 p 3 p
b)	Cum $X(a)=I_2-a\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5a & 2a\\ -10a & -4a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-5a & -2a\\ 10a & 1+4a\end{pmatrix}$. Atunci, $\det(X(a))=\begin{vmatrix}1-5a & -2a\\ 10a & 1+4a\end{vmatrix}=(1-5a)(1+4a)+2a\cdot 10a=1-a$; $\det(X(a))=0\Leftrightarrow 1-a=0\Rightarrow a=1.$ Pentru a = 1 rezultă că există o singură matrice neinversabilă;	2 p 2 p 1 p
c)	Dacă X(a) este inversabilă, rezultă că există $(X(a))^{-1}$ astfel încât $X(a)\cdot(X(a))^{-1}=I_2$. Vom nota cu X(b) pe $(X(a))^{-1}$ rezultând $X(a)\cdot X(b)=I_2\Leftrightarrow X(a+b-ab)=I_2\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}1-5(a+b-ab) & -2(a+b-ab)\\ 10(a+b-ab) & 1+4(a+b-ab)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$ a+b-ab=0 de unde rezultă că $b=\frac{a}{a-1}$; Aşadar, pentru $b=\frac{a}{a-1}$ se obţine inversa matricei X(a) şi anume $(X(a))^{-1}=X(b)=X\left(\frac{a}{a-1}\right)$.	1 p 2 p 2 p
2. a)	$x^2+1=0\Rightarrow x=\pm i$ $g(X)=(X-i)(X+i).$	3 p 2 p
b)	Polinomul f este divizibil cu polinomul $g(X)=X^2+1\Leftrightarrow f(i)=f(-i)=0$ ceea ce este adevărat deoarece $f(i)=(i^2+i+1)^{10}+(i^2+1)^{10}+1=i^{10}+1=i^2+1=-1+1=0.$ Analog pentru f(-i).	2 p 3 p

www.mateinfo.ro

c)	$f(X)=(X^2+X+1)^{10}+(X^2+1)^{10}+1=$ $=C_{10}^0(X^2+1)^{10}+C_{10}^1(X^2+1)^9\cdot X+C_{10}^2(X^2+1)^8\cdot X^2+.....+C_{10}^{10}X^{10}+(X^2+1)^{10}+1=$ $=2(X^2+1)^{10}+10(X^{19}+9X^{17}+...)+....=$ Observăm că a_{19} este coeficientul lui X^{19} prin urmare $a_{19}=10$.	2 p 2 p 1 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=(2x-4)e^{x^2-4x+2}$; $f'(0)=-4e^2$;	3p 2p
b)	f este crescătoare pe $[2;\infty)$ deoarece $f'(x)\rangle 0$ și este descrescătoare pe $(-\infty;2]$ deoarece $f'(x)\langle 0$. x=2 este punct de extrem local.	2p 2p 1p
c)	Cum f este descrescătoare pe $[0;1]\Rightarrow 0\le x\le 1\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(0)$. Se calculează f(1) și f(0), $\Rightarrow \frac{1}{e}\le f(x)\le e^2$	3p 2p
2. a)	$\int_0^1\frac{x^3-1}{x+2}dx=\int_0^1\left(x^2-2x+4-\frac{9}{x+2}\right)dx=$ $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+4x-9\ln(x+2)\right)\Big\|_0^1=\frac{10}{3}-9\ln\frac{3}{2}$.	2p 3p
b)	$V=\pi\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1-\frac{3}{x+2}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1-\frac{6}{x+2}+\frac{9}{(x+2)^2}\right)dx$ $=\pi\left(x-6\ln(x+2)-\frac{9}{x+2}\right)\Big\|_0^1=\pi\left(\frac{5}{2}-6\ln\frac{3}{2}\right)$.	3p 2p
c)	Fie $f:[1;2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$. Cum f '(x) este pozitivă rezultă că f este strict crescătoare pe [1;2]. Din $1\le x\le 2\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(2)\Rightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{4}$. După care se integrează inegalitatea, $0\le\int_1^2 f(x)dx\le\int_1^2\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$;	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro