BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 82

Prof: Stoica Alina Codruța

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 5-\log_2 3=\log_2 \frac{5}{3}$ $\log_2 \frac{5}{3}+\log_2 \frac{12}{5}=\log_2 4$ $\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2\cdot 1=2$	2p 2p 1p
2.	$T_{k+1}=C_8^k\sqrt{2}^k=C_8^k 2^{\frac{k}{2}}$ $\frac{k}{2}\in\mathbb{N}\Rightarrow k\in\{0,2,4,6,8\}$ avem 5 termeni raţionali Dezvoltarea are 9 termeni, deci 4 termeni vor fi iraţionali	2p 2p 1p
3.	$z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow \bar{z}=a-bi$ $3a-bi=6+i$ $a=2,b=-1$	1p 2p 2p
4.	Numere naturale de trei cifre: $9\cdot 10\cdot 10=$ 900 cazuri posibile. Numere de trei cifre care nu conțin cifra 6: $8\cdot 9\cdot 9=$ 648. Cazuri favorabile: $900-648=252$, deci $p=\frac{252}{900}=\frac{7}{25}$.	2p 2p 1p
5.	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ $\sqrt{(5-m)^2+(2+m)^2}=5$	2p 1p 2p

www.mateinfo.ro

	$m^2-3m+2=0$ cu soluţiile $m_1=1$ şi $m_2=2$	
6.	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos 60^\circ$ $a^2=36+16-48\cdot\frac{1}{2}=28\Rightarrow a=2\sqrt{7}$ $p=10+2\sqrt{7}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Dacă $x=0$ avem $A(0)=\begin{pmatrix}2014^0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $A(0)=I_3\Rightarrow I_3\in G$	2p 3p
b)	Pentru $x,y\in\mathbb{R}$ avem $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}2014^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2014^y & 0 & 0\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}2014^{x+y} & 0 & 0\\ 0 & 1 & x+y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$, $x+y\in\mathbb{R}$	3p 2p
c)	$A^2(x)=A(x)A(x)=A(2x)=\begin{pmatrix}2014^{2x} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\det A^2(x)=\begin{vmatrix}2014^{2x} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow$ $2014^{2x}=2014\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	2p 2p 1p
2. a)	$x,y\in(3,+\infty)\Rightarrow x-3>0, y-3>0$ $x\circ y=xy-3x-3y+12=(x-3)(y-3)+3>3\Rightarrow x\circ y\in(3,+\infty)$	2p 3p

www.mateinfo.ro

b)	$x\circ x=x\Rightarrow x^2-3x-3x+12=x$ $\Rightarrow x^2-7x+12=0$ cu soluţiile $x_1=3$ şi $x_1=4$	3p 2p
c)	Verificăm dacă $f(x+y)=f(x)\circ f(y)$ $f(x+y)=e^{x+y}+3$ $f(x)\circ f(y)=(f(x)-3)(f(y)-3)+3=(e^x+3-3)(e^y+3-3)+3=e^x\cdot e^y+3=e^{x+y}+3$ Fie $x_1,x_2\in R$, din $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{x_1}+3=e^{x_2}+3\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$ deci f injectivă Din $f(x)=y\Rightarrow e^x+3=y\Rightarrow e^x=y-3\Rightarrow x=\ln(y-3)\in R$ pentru $y\in(3,+\infty)$ deci f surjectivă Aşadar f bijectivă Cum f este morfism bijectiv rezultă că f este izomorfism de grupuri.	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\cos\frac{1}{x}$ este funcţie mărginită $-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$ $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$ f este continuă	2p 2p 1p
b)	$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ $f'(0)=0$	2p 3p
c)	$a_n=\frac{1}{n^3}\cos n^3+\frac{2}{n^3}\cos\frac{n^3}{2}+\frac{3}{n^3}\cos\frac{n^3}{3}+\ldots+\frac{n}{n^3}\cos\frac{n^3}{n}$ $\lvert a_n\rvert\le\frac{n+1}{2n^2}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$	1p 2p 2p
2. a)	Dacă $F:(0,+\infty)\to R$ este o primitivă a lui $f:(0,+\infty)\to R$ atunci F este derivabilă pe $(0,+\infty)$ şi $F'(x)=f(x),\ \forall x\in(0,+\infty)$ $F'(x)=f(x)=\ln x-x$	1p 1p

www.mateinfo.ro

	$F''(x)=f'(x)=(\ln x-x)'=(\ln x)'-x'=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ $\frac{1-x}{x}<0$ pentru $x\in(1,+\infty)$, deci F concavă pe $(1,+\infty)$	2p 1p
b)	$\int(x-f(x)+\ln x)^2dx=\int(x-\ln x+x+\ln x)^2dx=$ $=\int(2x)^2dx=\int 4x^2dx=$ $=4\frac{x^3}{3}+C$	2p 2p 1p
c)	$g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x-x}{x}=\frac{1}{x}\ln x-1$ $G(x)=\int g(x)dx=\int\left(\frac{1}{x}\ln x-1\right)dx=\int\frac{1}{x}\ln xdx-\int dx=\int(\ln x)'(\ln x)dx-\int dx=\frac{\ln^2 x}{2}-x+C$ $G(1)=\frac{\ln^2 1}{2}-1+C=-1+C$ $-1+C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=\frac{3}{2}$ deci $G(x)=\frac{\ln^2 x}{2}-x+\frac{3}{2}$	1p 2p 1p 1p

www.mateinfo.ro