BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 88

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{2}>\sqrt{1}=1>\frac{1}{2}$	2p
	Cum $8=\sqrt{2^6}<\sqrt[3]{3^6}=9$, rezultă că $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$.	2p
	Prin urmare, $\sqrt{2}\in\left(\frac{1}{2},\sqrt[3]{3}\right)$.	1p
2.	Determinăm mai întâi coordonatele punctelor de intersecție ale parabolei cu axa Ox. Pentru aceasta, rezolvăm ecuația $f(x)=0$.	1p
	În cazul nostru, discriminantul este $\Delta=7^2-4\cdot1\cdot10=9$. Obținem soluțiile $x_1=-5$ și $x_2=-2$.	3p
	Punctele de intersecție ale parabolei cu axa Ox sunt $A(-5;0)$ și $B(-2;0)$.	
	Distanța cerută este $AB=\|-2-(-5)\|=\|3\|=3$.	1p
3.	Impunem condiția de existență a logaritmului: $4^x-6>0$, adică $x\in(\log_4 6,+\infty)$.	1p
	Ecuația dată, pentru $x\in(\log_4 6,+\infty)$, este echivalentă cu ecuația $4^x-6=2^x$, adică $\left(2^x\right)^2-2^x-6=0$.	1p
	Notăm $2^x=y$, $y>0$, și obținem ecuația $y^2-y-6=0$, care are soluțiile $y_1=-2$ și $y_2=3$.	1p
	Ținând cont de faptul că $y>0$, deducem că putem păstra doar soluția $y=3$.	1p
	Din $2^x=3$ se obține $x=\log_2 3$.	
	Cum $\log_4 6=\log_{2^2}6=\frac{1}{2}\log_2 6=\log_2\sqrt{6}<\log_2\sqrt{9}=\log_2 3$, rezultă că $\log_2 3\in(\log_4 6,+\infty)$.	1p
	Așadar, ecuația $\log_2\left(4^x-6\right)=x$ are soluția $x=\log_2 3$.	
4.	Cardinalul mulțimii $\{1,3,6,8\}$ este egal 4. Atunci numărul cazurilor posibile este egal cu $4\cdot4=16$.	2p
	Produsul a două numere naturale pare este par. Produsul dintre un număr natural impar și un număr natural par este par. Cazurile favorabile vor fi:	2p
	$(a,b)\in\{(1,6),(1,8),(3,6),(3,8),(6,1),(6,3),(6,6),(6,8),(8,1),(8,3),(8,6),(8,8)\}$	1p
	Probabilitatea cerută este $P=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.	
5.	Cei doi vectori sunt coliniari dacă și numai dacă $\frac{2}{a}=\frac{3a+1}{3-a}$. Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$, atunci obținem că	2p
	$2(3-a)=a(3a+1)$, adică ecuația de gradul al doilea $a^2+a-2=0$.	
	Discriminantul ecuației este $\Delta=9$. Obținem soluțiile $a_1=-2$ și $a_2=1$.	3p
6.	Avem $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.	2p

www.mateinfo.ro

	Atunci $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$.	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Avem $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ m & -1 & -1\end{vmatrix}=2+m-2+4m+1+1=5m+2$.	3p
	Rezolvând ecuația $5m+2=0$, obținem $m=-\frac{2}{5}$.	2p
b)	Dacă $m\neq-\frac{2}{5}$, atunci sistemul este compatibil determinat.	1p
	Pentru $m=-\frac{2}{5}$, conform subpunctului a), determinantul matricei sistemului este nul.	1p
	Matricea sistemului are rangul egal cu 2, deoarece $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1+4=5\neq0$.	1p
	Considerăm determinantul caracteristic $d_c=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & n\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-n+2$.	1p
	Sistemul este incompatibil pentru $m=-\frac{2}{5}$ și $n\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.	1p
c)	Deoarece x_0, y_0 și z_0 sunt în progresie aritmetică, deducem că $2y_0=x_0+z_0$, adică $x_0-2y_0+z_0=0$.	2p
	Dacă sistemul admite soluția (x_0,y_0,z_0), atunci din a doua ecuație a sistemului obținem că $x_0-2y_0+z_0=n$.	2p
	În concluzie, $n=0$.	1p
2. a)	Ecuația $g(x)=\hat{0}$, adică $x+\hat{3}=\hat{0}$, are în $\mathbb{Z}_5$ soluția $x=\hat{2}$.	2p
	Cum polinomul g divide polinomul f, trebuie ca $f(\hat{2})=\hat{0}$, adică $\hat{2}a+\hat{3}=\hat{0}$.	1p
	Ecuația $\hat{2}a+\hat{3}=\hat{0}$ este echivalentă cu $\hat{2}a=\hat{2}$. Obținem astfel soluția $a=\hat{1}$.	2p
b)	Pentru $a=\hat{1}$, obținem $f=X^3+X^2+X+\hat{1}$.	1p
	Pe de altă parte, avem $(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})=X^3+X^2+X+\hat{1}$.	3p
	Prin urmare, $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$.	1p
c)	Cum $f=X^3+X^2+X+\hat{1}$, avem $f(\hat{0})=\hat{0}^3+\hat{0}^2+\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}\neq\hat{0}$,	2p
	$f(\hat{1})=\hat{1}^3+\hat{1}^2+\hat{1}+\hat{1}=\hat{4}\neq\hat{0}$, $f(\hat{2})=\hat{2}^3+\hat{2}^2+\hat{2}+\hat{1}=\hat{0}$,	1p
	$f(\hat{3})=\hat{3}^3+\hat{3}^2+\hat{3}+\hat{1}=\hat{0}$, $f(\hat{4})=\hat{4}^3+\hat{4}^2+\hat{4}+\hat{1}=\hat{0}$.	1p
	În concluzie, ecuația $f(x)=\hat{0}$ are în $\mathbb{Z}_5$ soluțiile $x=\hat{2}$, $x=\hat{3}$ și $x=\hat{4}$.	1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-xe^2}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^2}{1}=-e^2\in\mathbb{R}^*$ și	2p
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+e^2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.	2p
	Atunci $y=-e^2x$ este ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f spre $-\infty$.	1p
b)	Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ pentru că se obține prin operații cu funcții derivabile.	1p
	$f'(x)=e^x-e^2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	
	Fie $A\left(a,e^a-ae^2\right)$ un punct oarecare al graficului funcției f. Tangenta în punctul $A\left(a,e^a-ae^2\right)$	2p
	la graficul funcției f are panta egală cu $f'(a)=e^a-e^2$.	
	Cum tangenta la graficul funcției f trebuie să fie paralelă cu dreapta de ecuație $y=1$, rezultă	2p
	că are loc egalitatea $e^a-e^2=0$ (dreptele paralele au pante egale). De aici obținem că $a=2$.	
	Punctul căutat este $A\left(2,-e^2\right)$.	
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(\frac{f'(x)}{(x-2)e^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(\frac{e^x-e^2}{(x-2)e^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}\overset{(1^\infty)}{=}$	2p
	$=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(1+\frac{e^x-e^2-xe^2+2e^2}{(x-2)e^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{e^x-xe^2+e^2}{(x-2)^2e^2}}=\sqrt{e}$,	1p
	pentru că $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{e^x-xe^2+e^2}{(x-2)^2e^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{e^2(e^{x-2}-1)}{2e^2(x-2)}=\frac{1}{2}$.	2p
2. a)	Din $1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ va rezulta că $t\in[0,1]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $\cos t>0$, pentru orice $t\in[0,1]$.	2p
	Cum $t^n\geq0$, pentru orice $t\in[0,1]$ și $n\in\mathbb{N}^*$, deducem că $t^n\cos t\geq0$, $(\forall)\ t\in[0,1]$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.	2p
	Prin urmare, $\int_0^1 t^n\cos t\,dt\geq0$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$, cee ce înseamnă că $x_n\geq0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.	1p
b)	Vom aplica metoda integrării prin părți. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $t\in[0,1]$ considerăm că $u(t)=t^{n+1}$ și	2p
	$v(t)=\sin t$. Funcțiile u și v sunt derivabile pe $[0,1]$, iar $u'(t)=(n+1)t^n$ și $v'(t)=\cos t$.	
	Funcțiile u' și v' sunt continue pe $[0,1]$. Atunci:	
	$x_{n+1}=\int_0^1 t^{n+1}\cos t\,dt=t^{n+1}\sin t\Big\vert_0^1-(n+1)\int_0^1 t^n\sin t\,dt=\sin1-(n+1)y_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.	3p
	Așadar, $x_{n+1}=-(n+1)y_n+\sin1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.	
c)	Cum $0\leq t^n\cos t\leq t^n$, $(\forall)\ t\in[0,1]$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că $0\leq x_n\leq\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.	2p
	Aplicând criteriul cleștelui, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.	
	Conform punctului anterior, $x_{n+1}=-(n+1)y_n+\sin1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.	1p
	Avem $y_{n+1}=(n+1)x_n-\cos1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, adică $nx_n=y_{n+1}-x_n+\cos1$, pentru orice	

www.mateinfo.ro

	$n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită în această egalitate, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \cos 1$.	2p

www.mateinfo.ro