BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 96

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. 3p

$$\frac{2x+3}{x-1}=\frac{2x-2+5}{x-1}=2+\frac{5}{x-1}\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{x-1}\in\mathbf{Z}$$

2p

$$\Leftrightarrow x-1\in\{-5,-1,1,5\}\Leftrightarrow x\in\{-4,0,2,6\}$$

2.

1p

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2},n\geq 1$$

2p

$$n=1\Rightarrow a_1=\frac{3-1}{6}=\frac{1}{3};\ n=4\Rightarrow a_4=\frac{12-1}{6}=\frac{11}{6}$$

2p

$$S_4=\frac{(a_1+a_4)\cdot 4}{2}=2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{11}{6}\right)=2\cdot\frac{13}{6}=\frac{13}{3}$$

3.

1p

$$x^2-2(m-2)x+m>0,(\forall)x\in R\Leftrightarrow\Delta<0$$

2p

$$\Delta=b^2-4ac=4(m-2)^2-4m=4(m^2-5m+4)$$

2p

$$m^2-5m+4=0\Rightarrow\begin{matrix}m_1=1\\m_2=4\end{matrix}$$

m	$-\infty$ 1 4 ∞
m^2-5m+4	+ + + + 0 - - - - - 0 + + + + + +

2p

$$m^2-5m+4<0\Leftrightarrow m\in(1,4)$$

4.

2p

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!},0\leq k\leq n$$

3p

$$A_{12}^7=\frac{12!}{5!}=6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12$$

www.mateinfo.ro

5.	$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$ Din $AA'\perp BC\Rightarrow m_{AA'}=-\frac{1}{m_{BC}}=2$ Ecuația dreptei determinată de un punct și o direcție: $y-y_0=m(x-x_0)$ $AA':\ y-5=2(x-2)\Leftrightarrow AA':\ 2x-y+1=0$	2p 3p
6.	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos a+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-a\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+a\right)=\cos a+$ $=2\cos\frac{\frac{2\pi}{3}-a+\frac{2\pi}{3}+a}{2}\cos\frac{\frac{2\pi}{3}-a-\frac{2\pi}{3}-a}{2}=$ $=\cos a+2\cos\frac{2\pi}{3}\cos(-a)=\cos a+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos a=\cos a-\cos a=0$	1p 1p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1&1-1\\-1+1&-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$ $B\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1&-1+1\\1-1&-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$ Deci $A\cdot B=B\cdot A=O_2$	2p 2p 1p
b)	$(A+B)^n=C_n^0A^n+C_n^1A^{n-1}\cdot B+C_n^2A^{n-2}\cdot B^2+\ldots+C_n^{n-1}A\cdot B^{n-1}+C_n^nB^n=$ $=A^n+C_n^1A^{n-2}\cdot AB+\ldots+C_n^{n-1}AB\cdot B^{n-2}+B^n=A^n+B^n$ Deoarece $A\cdot B=B\cdot A=O_2$, conform punctului a).	3p 2p
c)	$A^{2012}+B^{2012}=(A+B)^{2012}=\left[\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right]^{2012}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}^{2012}=$ $=(2\cdot I_2)^{2012}=2^{2012}\cdot I_2=\begin{pmatrix}2^{2012}&0\\0&2^{2012}\end{pmatrix}$	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$\det\left(A^{2012}+B^{2012}\right)=\begin{vmatrix}2^{2012} & 0\\ 0 & 2^{2012}\end{vmatrix}=2^{2012}\cdot 2^{2012}=2^{4024}$	2p
2.	$x^2y^2-x^2-y^2+2=\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1>1,(\forall)x.y\in(1,\infty)$	1p
a)	$x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}\in M,(\forall)x,y\in(1,\infty)$	2p
	$(x*y)*z=\sqrt{\left[(x*y)^2-1\right]\left(z^2-1\right)+1}=\sqrt{\left[\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1-1\right]\left(z^2-1\right)+1}=$	
	$=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)+1},(\forall)x,y,z\in(1,\infty);$ (1)	
	$x*(y*z)=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left[(y*z)^2-1\right]+1}=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left[\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)+1-1\right]+1}=$	2p
	$=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)+1},(\forall)x,y,z\in(1,\infty)$; (2)	
	Din relațiile (1) și (2) rezultă că legea este asociativă pe M.	
b)	Să arătăm că există $e\in M$ astfel încât $x*e=e*x=x,(\forall)x\in M$.	3p
	$x*e=x,(\forall)x\in M\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)+1}=x,(\forall)x\in M\Leftrightarrow$	
	$\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)+1=x^2,(\forall)x\in M\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(e^2-2\right)=0,(\forall)x\in M\Leftrightarrow$	
	$\Leftrightarrow e=\sqrt{2}\in(1,\infty),(\forall)x\in M$	
	Să arătăm că oricare ar fi $x\in M$ există $x'\in M$ astfel încât $x*x'=x'*x=\sqrt{2}$.	
	$x*x'=\sqrt{2},(\forall)x\in M\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x'^2-1\right)+1}=\sqrt{2},(\forall)x\in M\Leftrightarrow$	
	$\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(x'^2-1\right)+1=2,(\forall)x\in M\Leftrightarrow x'^2-1=\frac{1}{x^2-1},(\forall)x\in M\Leftrightarrow$	2p
	$\Leftrightarrow x'^2=1+\frac{1}{x^2-1}>1,(\forall)x\in(1,\infty)\Rightarrow x'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\in(1,\infty),(\forall)x\in(1,\infty)$	
	Deci orice element din M este inversabil în raport cu această lege.	
c)	Se arată prin inducție că $\underbrace{x*x*x*...*x}_{de\ \ n\ \ ori}=\sqrt{\left(x^2-1\right)^n+1}$	2p
	$\underbrace{x*x*x*...*x}_{de\ \ 2012\ \ ori}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)^{2012}+1}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^{2012}=1\Leftrightarrow x^2-1=1\Leftrightarrow$	2p
	$\Leftrightarrow x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}\in M$	1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Dacă $x\in(-\infty,0)\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}=\dfrac{1+x\cdot e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}}=1$	2p
	Dacă $x\in(0,\infty)\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{nx}\left(\frac{1}{e^{nx}}+x\right)}{e^{nx}\left(\frac{1}{e^{nx}}+1\right)}=x$	2p
	Pentru $x=0\Rightarrow f(0)=\dfrac{1}{1+e^0}=\dfrac{1}{2}$	1p
	$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}1, & x\in(-\infty,0)\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ x, & x\in(0,\infty)\end{cases}$	
b)	$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=e^{f(x)+1}=e^{x+1}$	1p 1p 1p 2p
c)	Funcția $h(x)=e^{x+1}$ este continuă și derivabilă pe domeniul de definiție $(0,\infty)$, atunci h este continuă pe $[1,2]$ și derivabilă pe $(1,2)$, deci se poate aplica teorema lui Lagrange: adică există $c\in(1,2)$ astfel încât $h(2)-h(1)=(2-1)h'(c)\Rightarrow e^3-e^2=e^{c+1}\Leftrightarrow$	1p 1p
	$\Leftrightarrow e^{c+1}=e^2(e-1)\Rightarrow c+1=\ln e^2(e-1)\Rightarrow c=\ln e^2(e-1)-1$	1p
	Din $2<e<3\Rightarrow 1<e-1<2\Rightarrow e^2<e^2(e-1)<2e^2\Rightarrow 2<\ln e^2(e-1)<2+\ln 2\Rightarrow$	
	$\Rightarrow 1<\ln e^2(e-1)-1<1+\ln 2<2$; deci $c\in(1,2)$.	2p
2. a)	$\int_0^4 f^2(x)dx=\int_0^4(16-x^2)dx=$	2p
	$=\left(16x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^4=$	2p
	$=64-\dfrac{64}{3}=\dfrac{128}{3}$	1p

www.mateinfo.ro

b) $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)}dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx = 0$ — 3p

Deoarece funcția $g(-x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = -g(x), (\forall)x \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$, deci g este funcție impară. — 2p

c) $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$ — 2p

x	-4	0	4
$f'(x)$	+ + + + + + +	0	- - - - - - - - - - - -
$f(x)$	0	↗	4 ↘ 0

— 1p

Observăm că $0 \le f(x) \le 4 \Rightarrow 0 \le \int_{-4}^{4} f(x)dx \le 4x\Big|_{-4}^{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le \int_{-4}^{4} f(x)dx \le 16 - (-16) = 32$. — 2p

Deci $0 \le \int_{-4}^{4} f(x)dx \le 32$.

www.mateinfo.ro