BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 97

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{2x^3-3x^2+4x+9}{2x+1}=\frac{2x^3+x^2-4x^2-2x+6x+3+6}{2x+1}=$ $=\frac{x^2(2x+1)-2x(2x+1)+3(2x+1)+6}{2x+1}=\frac{(2x+1)(x^2-2x+3)+6}{2x+1}=$ $=\left(x^2-2x+3+\frac{6}{2x+1}\right)\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow\frac{6}{2x+1}\in\mathbf{Z}.$ $2x+1\vert 6\Leftrightarrow 2x+1\in\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$ $2x+1=-6\Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}\notin\mathbf{Z};\ 2x+1=-3\Leftrightarrow x=-2\in\mathbf{Z};\ 2x+1=-2\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\notin\mathbf{Z};$ $2x+1=-1\Leftrightarrow x=-1\in\mathbf{Z};\ 2x+1=1\Leftrightarrow x=0\in\mathbf{Z};\ 2x+1=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z};$ $2x+1=3\Leftrightarrow x=1\in\mathbf{Z};\ 2x+1=6\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\notin\mathbf{Z}$ $A=\{-2,-1,0,1\}.$	3p 2p
2.	$y=5+\vert x-1\vert\Leftrightarrow\vert x-1\vert=y-5>0\Rightarrow\vert y-5\vert=y-5$ $2\vert x-1\vert=6\Leftrightarrow\vert x-1\vert=3\Leftrightarrow x-1=\pm 3\Rightarrow\begin{matrix}x=4\Rightarrow y=8\\ x=-2\Rightarrow y=8\end{matrix}$ Soluția $S=\{(4,8);(-2,8)\}.$	2p 2p 1p
3.	$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k, 0\le k\le n$; C.E. $n\ge 4; n\in\mathbf{N}$ $\frac{C_n^4}{C_n^2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\cdot\frac{2!}{4!}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow$	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$\frac{(n-2)(n-3)\cdot 2}{4\cdot 3\cdot 2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow n^2-5n+6=42\Leftrightarrow n^2-5n-36=0\Rightarrow \begin{matrix} n_1=9 \\ n_2=-4 \end{matrix} \Rightarrow n=9\in\mathbf{N}$	2p
4.	Fie $x_1,x_2\in(1,\infty)$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)=0\Leftrightarrow$ $(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2-3)=0\Leftrightarrow (x_2-x_1)\left[(x_2^2-1)+(x_1x_2-1)+(x_1^2-1)\right]=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x_2-x_1=0\Leftrightarrow x_2=x_1\Rightarrow f$ funcție injectivă. Din $f(1)=-2$, f continuă și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\Rightarrow f((1,\infty))=(-2,\infty)\Rightarrow f$ surjectivă. f funcție injectivă și surjectivă, atunci f bijectivă.	2p 3p
5.	$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$ $\vec{GA}=(3-3)\vec{i}+(2-4)\vec{j}=-2\vec{j}$; $\vec{GB}=(5-3)\vec{i}+(4-4)\vec{j}=2\vec{i}$ $-2\vec{j}+2\vec{i}+\vec{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{GC}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ $(x_C-3)\vec{i}+(y_C-4)\vec{j}=-2\vec{i}+2\vec{j}\Leftrightarrow \begin{cases} x_C-3=-2 \\ y_C-4=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_C=1 \\ y_C=6 \end{cases}\Rightarrow C(1,6)$	1p 1p 1p 2p
6.	$E=2\left[(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3\right]-3\left[(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2\right]=$ $=2\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)\right]-$ $-3\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]=$ $=2(1-3\sin^2 x\cos^2 x)-3(1-2\sin^2 x\cos^2 x)=2-6\sin^2 x\cos^2 x-3+6\sin^2 x\cos^2 x=$ $=-1$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A_x=\begin{vmatrix} -x & -1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & -x \\ x & 1 & x & 1 \\ 1 & -x & -1 & x \end{vmatrix}\overset{\substack{c1+c3 \\ c2+c4}}{=}\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -x \\ 2x & 2 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}=$	2p
	$=-2\cdot\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ 2 & 1 & -x \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix}=$	2p
	$=4(x^2+1)$	1p

www.mateinfo.ro

b)	$\det A_x = 0 \Leftrightarrow x^2+1=0 \Leftrightarrow x = \pm i \in \mathbf{C}$. Pentru $x \in \mathbf{C} - \{-i, i\}$ $rangA_x = 4$ $x = i \Rightarrow \det A_x = 0$; există $\begin{vmatrix} -i & -1 & i \\ 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \end{vmatrix} = -i^3 - i + i - i^3 + i + i = 4i \neq 0$ $x = -i \Rightarrow \det A_x = 0$; există $\begin{vmatrix} i & -1 & -i \\ 1 & -i & 1 \\ -i & 1 & -i \end{vmatrix} = i^3 + i - i + i^3 - i - i = -4i \neq 0$ Deci $rangA_x = 3$ pentru $x = \pm i$.	1p 2p 2p
c)	$\lvert z \rvert = \lvert x + iy \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\lvert i \rvert = \lvert 0 + 1 \cdot i \rvert = 1$; $-\lvert i \rvert = \lvert 0 - 1 \cdot i \rvert = 1$ $S = \lvert i \rvert + \lvert -i \rvert = 1 + 1 = 2$	1p 2p 2p
2. a)	$M(a) = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 \\ 2-2a & 2a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & -1+a \\ 2-2a & -1+2a \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & a \\ -2a & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = A + aB$ cu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	1p 3p 1p
b)	Arătăm că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea. Fie $M(x), M(y) \in G$, $M(x)M(y) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-y & y-1 \\ 2-2y & 2y-1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 4-2x-2y+xy+2x-2-2xy+2y & 2y-xy-2+x+2xy-2y-x+1 \\ 4-4x-2y+2xy+4x-2-4xy+2y & 2y-2xy-2+2x+4xy-2y-2x+1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2-xy & xy-1 \\ 2-2xy & 2xy-1 \end{pmatrix} = M(xy) \in G$. Verificăm axiomele grupului: G_1 Se știe că înmulțirea matricelor este asociativă. G_2 $M(x) \cdot M(y) = M(xy) = M(yx) = M(y) \cdot M(x), (\forall) M(x), M(y) \in G$, deci înmulțirea	1p 1p 1p

www.mateinfo.ro

	este comutativă. G_3 $M(x)\cdot M(e)=M(x);(\forall)M(x)\in G \Leftrightarrow M(xe)=M(x);(\forall)M(x)\in G \Leftrightarrow xe=x,(\forall)x\in \mathbf{R}^* \Leftrightarrow x(e-1)=0,(\forall)x\in\mathbf{R}^*\Rightarrow e=1\in\mathbf{R}^*,(\forall)x\in\mathbf{R}\Rightarrow M(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2\in G$ element neutru. G_4 $M(x)\cdot M(x')=M(e);(\forall)M(x)\in G \Leftrightarrow M(xx')=M(1);(\forall)M(x)\in G \Leftrightarrow xx'=1,(\forall)x\in \mathbf{R}^* \Rightarrow x'=\frac{1}{x}\in\mathbf{R}^*,\ (\forall)x\in\mathbf{R}^*$, deci inversa oricărei matrice $M(x)$ este matricea $M\left(\frac{1}{x}\right)$. $(G,\cdot)$ grup abelian.	1p 1p 1p
c)	Fie funcția $f:\mathbf{R}^*\to G,\ f(x)=M(x)$. 1)Funcția este funcție bijectivă prin construcție. 2) $f(x\cdot y)=M(xy)=M(x)\cdot M(y)=f(x)\cdot f(y),(\forall)x,y\in\mathbf{R}^*$, adică f este morfism de grupuri. Deci funcția f este izomorfism de grupuri.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$l_s=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\frac{-p}{-1}=p;\ l_d=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\ln 1=0;\ f(0)=\ln 1=0$ Deci $l_s=l_d=f(0)\overset{p=0}{\Rightarrow} f$ continuă în $x=0$, adică, pentru $p=0$, f este continuă pe $[-1,1]$.	3p 2p
b)	$f'(x)=\begin{cases}\frac{(6x+r)(x-1)-3x^2-rx}{(x-1)^2}, & x<0\\ \frac{2qx-3}{qx^2-3x+1}, & x>0\end{cases}=\begin{cases}\frac{3x^2-6x-r}{(x-1)^2}, & x<0\\ \frac{2qx-3}{qx^2-3x+1}, & x>0\end{cases}$ $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=-r;\ f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=-3$ Dacă $f_s'(0)=f_d'(0)\Leftrightarrow r=3\Rightarrow f$ este derivabilă în $x=0$.	2p 2p 1p
c)	Funcția f verifică teorema lui Rolle, adică: f este continuă pe intervalul $[-1,1]$, f este derivabilă pe $(-1,1)$ și $f(-1)=f(1)$.	1p

www.mateinfo.ro

	$f(-1)=0;\ f(1)=\ln(q-2)$ $\ln(q-2)=0\Leftrightarrow q=3$ $S=p^2+q^2+r^2=0+3^2+3^2=18$	1p 1p 2p
2. a)	$I_0=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}dx=x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=1$ $I_1=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,dx=0$, deoarece $\arcsin(-x)=-\arcsin x,(\forall)x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, deci funcția $g(x)=\arcsin x$ este funcție impară.	2p 3p
b)	Dacă n este impar, atunci funcția $g(x)=(\arcsin x)^n$ este funcție impară, deci $I_{2n+1}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^{2n+1}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g(x)dx=0$. Calculăm relația de recurență pentru n par $I_{2n}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^{2n}dx=x(\arcsin x)^{2n}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^{2n-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$ $=\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'(\arcsin x)^{2n-1}dx=$ $=\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+2n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{2n-1}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}(2n-1)(\arcsin x)^{2n-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$ $=\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+2n\cdot\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1}-2n(2n-1)I_{2n-2}$ Deci $I_{2n}=\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+2n\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1}-2n(2n-1)I_{2n-2}$	1p 1p 1p 2p
c)	$-\frac{\pi}{6}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{6}\Rightarrow\left(-\frac{\pi}{6}\right)^n\le(\arcsin x)^n\le\left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ de unde, prin integrare obținem:	2p

www.mateinfo.ro

	$\left(-\frac{\pi}{6}\right)^n \cdot x\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \le I_n \le \left(\frac{\pi}{6}\right)^n \cdot x\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$	1p
	$\Leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{6}\right)^n \le I_n \le \left(\frac{\pi}{6}\right)^n$	2p
	$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\pi}{6}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{6}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0$, $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent.	

www.mateinfo.ro